JOHANNES GUTENBERG-UNIVERSITÄT
MAINZ

BACHELORARBEIT

Vorgelegt dem Fachbereich 08 für
Physik, Mathematik und Informatik

# Galoisabstieg, Kohomologie und Brauergruppen

*Angefertigt von:*
Jakob WERNER

*Betreuer:*
Prof. Dr. Manfred LEHN

9. August 2017

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

# Einleitung

Die Brauergruppe eines Körpers ist eine etwas subtile Invariante, die sich dennoch seit ihrer Entdeckung als enorm wichtig sowohl in der algebraischen Zahlentheorie, als auch in der algebraischen Geometrie herausgestellt hat. Ihre Elemente sind Isomorphieklassen zentraleinfacher Algebren modulo der Identifikation solcher Algebren, die sich lediglich um die Endomorphismenalgebra eines endlichdimensionalen Vektorraumes unterscheiden. Schon seit den Arbeiten von Emmy NOETHER waren die Verbindungen zur Galoiskohomologie einigermaßen klar, obwohl die abstrakte Sprache der Gruppenkohomologie noch nicht entwickelt war. Namentlich lässt sich die relative Brauergruppe $\mathrm{Br}(K|k)$ mit der zweiten Galoiskohomologie $H^2(K|k, K^\times)$ identifizieren und stimmt im Fall $K = k^{\mathrm{s}}$ mit der absoluten Brauergruppe $\mathrm{Br}(k)$ überein.

Es folgt, dass sämtliche funktoriellen Morphismen aus der Gruppenkohomologie eine Entsprechung auf dem Niveau der zentraleinfachen Algebren haben müssen. Um diese angeben zu können, ist es nützlich, die Kategorie der Vektorräume bzw. Algebren über $k$ durch die äquivalente Kategorie der $K$-Vektorräume mit einer gewissen Wirkung der Galoisgruppe $G(K|k)$ zu ersetzen. Der Terminologie aus [Dra83] folgend nennen wir diese *Galoismoduln* bzw. *Galoisalgebren*. Den Satz über Galoisabstieg (Satz 3.2) findet man in derselben Quelle für endliche Galoiserweiterungen. Wir formulieren und beweisen das Resultat hier im proendlichen Fall.

Insbesondere, um den *Korestriktionsfunktor* geeignet beschreiben zu können, ist ein solcher Wechsel der Perspektive nützlich. Dieser Zugang wurde zum Beispiel in [Dra83] detailliert beschrieben; leider basiert der dort angegebene Beweis der $\mathrm{Cores} \circ \mathrm{Res}$-Formel auf einem falschen Zwischenresultat. Dies wurde unter anderem in [Tig87] bemerkt und korrigiert. Ich gebe hier einen etwas elementareren Beweis desselben Resultats (Satz 6.3).

Die Verschiebung der Aufmerksamkeit von $k$-Algebren hin zu $K|k$-Galoisalgebren führt auch zu einem Beweis der Formel $\mathrm{Br}(K|k) \cong H^2(K|k, K^\times)$ (Korollar 10.4), wie ich im zweiten Teil der Arbeit kurz beschreibe. Wohingegen die Elemente von $\mathrm{Br}(k)$ sich tatsächlich um Isomorphie von $k$-Algebren unterscheiden, sind die Elemente der relativen Brauergruppe $\mathrm{Br}(K|k)$, wie wir sie definieren, als $K$-Algebra alle isomorph zu einer Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}(V)$ und der Unterschied besteht lediglich in der Galoiswirkung. Wie viele wesentlich verschiedene solcher Wirkungen möglich sind, wird durch die nichtabelsche Kohomologie $H^1(K|k, \mathrm{PGL}(V))$ beschrieben (Korollar 9.3). Durch die kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow K^\times \longrightarrow \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{PGL}(V) \longrightarrow 0$ erhält man die Verbindung zur zweiten Kohomologie $H^2(K|k, K^\times)$.

Bedauerlicherweise hat der Platz in dieser Arbeit nicht ausgereicht, um ein detailliertes Lexikon zwischen kohomologischen und algebrentheoretischen Konzepten aufzustellen und beispielsweise zu zeigen, dass die Homomorphismen Inflation, Restriktion und Korestriktion zwischen Brauergruppen (Bemerkung 4.4) tatsächlich zu den jeweiligen Homomorphismen der Gruppenkohomologie korrespondieren. Ich bin dennoch der

Ansicht, dass dieses Vorhaben leichter zu realisieren ist, wenn man es zunächst auf dem Niveau der ersten Kohomologie durchführt (Lemma 10.1) und anschließend zu Brauerklassen und zweiter Kohomologie übergeht.

Durchweg habe ich mich zu einer basisunabhängigen Formulierung der Resultate entschieden; das heißt, ich habe mit endlichdimensionalen Vektorräumen und deren Endomorphismenalgebren gearbeitet, anstelle der konkreten Realisierungen $k^n$ und $M_n(k)$. Ob diese Entscheidung zur Klarheit der Darstellung beigetragen hat, möge die Leserin oder der Leser selbst entscheiden. Betrachtet man jedoch allgemeiner Brauergruppen kommutativer Ringe — eine Theorie, die in dieser Arbeit vollständig ignoriert wird —, so ist es ohnehin notwendig, mit treuen, endlich erzeugt-projektiven Moduln und deren Endomorphismenalgebren zu arbeiten.

Die koordinatenfreie Darstellung führt insbesondere zu einer Notwendigkeit, konsequent mit Tensorprodukten in verschiedenen Kategorien zu arbeiten. Dies wird durch die kategorientheoretischen Konzepte der monoidalen Kategorien und Funktoren abstrahiert und vereinheitlicht. Die Grundbegriffe dieser Theorie habe ich in einem Anhang zusammengefasst.

So viel sei an dieser Stelle zum Inhalt der vorliegenden Arbeit gesagt. Ich möchte mich schließlich noch bei meinem Betreuer Prof. Manfred LEHN bedanken, dass er mich vor einiger Zeit mit der höchst interessanten Theorie der Brauergruppen vertraut gemacht hat, und außerdem, dass er mir eine solche Freiheit in der Themenfindung für diese Arbeit gewährt hat. Dies hat dazu geführt, dass ich während der erweiterten Bearbeitungszeit die Möglichkeit hatte, mir einen Einblick in eine ganze Reihe verwandter Themengebiete zu verschaffen, die letzten Endes aus Platzgründen kaum explizit Eingang in den Inhalt dieser Bachelorarbeit gefunden haben.

# Inhaltsverzeichnis

# Teil I.
# Galoisabstieg und Brauergruppen

## 1. Galoismoduln und Galoisalgebren

Im Folgenden sei $K|k$ eine galoissche Körpererweiterung.

**Definition 1.1.** Ein *$K|k$-Galoismodul* besteht aus einem $K$-Vektorraum $V$ zusammen mit einer Wirkung der Galoisgruppe $G(K|k)$ auf $V$ durch $k$-lineare Automorphismen, welche stetig bezüglich der diskreten Topologie auf $V$ ist, und zudem $K$-semilinear in dem Sinne, dass stets

$$\sigma(\alpha v) = \sigma(\alpha)\sigma(v)$$

für $\alpha \in K$, $v \in V$ gilt.

Ein *Homomorphismus* $f\colon V \longrightarrow W$ von $K|k$-Galoismoduln sei eine $K$-lineare Abbildung, welche zudem verträglich mit der Galoiswirkung ist. Wir schreiben $\mathsf{GMod}(K|k)$ für die Kategorie der $K|k$-Galoismoduln.

**Lemma 1.2.** *1. Es seien $V$, $W$ zwei $K|k$-Galoismoduln. Dann trägt das Tensorprodukt $V \otimes_K W$ über $K$ selbst wieder die Struktur eines $K|k$-Galoismoduls mit der Wirkung*

$$\sigma(v \otimes w) = \sigma(v) \otimes \sigma(w)\,.$$

*2. Es sei $V$ ein $K|k$-Galoismodul. Dann bezeichne $V^*$ die Menge aller $K$-linearen Abbildungen $f\colon V \longrightarrow K$, für welche $G_f = \{\sigma \in G \mid \sigma \circ f = f \circ \sigma\}$ offen in $G(K|k)$ ist. Es trägt $V^*$ die Struktur eines $K|k$-Galoismoduls mit der Wirkung durch Konjugation: $\sigma(f) = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}$.*

*3. Die direkte Summe $\bigoplus V_i$ einer Familie $(V_i)$ von $K|k$-Galoismoduln trägt wieder die Struktur eines $K|k$-Galoismoduls mit der komponentenweisen Galoiswirkung.*

*Beweis.* Es sind einige einfache Überlegungen zur Wohldefiniertheit der Wirkung und zur Stetigkeit nötig, aber mit solchen möchte ich die Leserin oder den Leser hier und in ähnlichen Situationen nicht langweilen. ■

**Bemerkung 1.3.** Die Kategorie der $K|k$-Galoismoduln erhält durch das gerade erklärte Tensorprodukt die Struktur einer symmetrisch monoidalen Kategorie[1] und als solche wollen wir sie auch stets betrachten. Das Tensorprodukt erfüllt eine ähnliche universelle Eigenschaft, wie das gewöhnliche bilineare Tensorprodukt von Vektorräumen. Deshalb lassen sich die elementaren Eigenschaften, wie etwa das Vertauschen mit direkten Summen, ebenso herleiten.

[1] Vgl. Definition A.1

**Definition 1.4.** Ein $K|k$-Galoismodul heißt *frei*, wenn er die Form $\bigoplus_{i \in I} K$ für eine Indexmenge $I$ hat, und *endlichdimensional*, wenn $I$ endlich ist. Der Satz über Galoisabstieg wird zeigen, dass jeder $K|k$-Galoismodul frei ist.

**Definition 1.5.** Monoide in der symmetrisch monoidalen Kategorie der $K|k$-Galoismoduln heißen *$K|k$-Galoisalgebren*. Die Multiplikation $A \otimes A \longrightarrow A$ lässt sich natürlich mit einer gewöhnlichen Multiplikation $A \times A \longrightarrow A$ identifizieren, welche auf $A$ die Struktur einer $K$-Algebra liefert. Die Galoiswirkung erfüllt $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$ und $\sigma(\alpha a) = \sigma(\alpha)\sigma(a)$ für $\alpha \in K$.

Die symmetrisch monoidale Monoidkategorie der $K|k$-Galoisalgebren bezeichnen wir mit $\mathsf{GAlg}(K|k)$.

**Lemma 1.6.** *1. Ist $V$ ein $K|k$-Galoismodul, so bezeichne $\mathrm{End}(V)$ die Menge aller $K$-linearen Abbildungen $V \longrightarrow V$, für welche $G_f = \{\sigma \in G \mid \sigma \circ f = f \circ \sigma\}$ offen in $G(K|k)$ ist. $\mathrm{End}(V)$ trägt die Struktur einer $K|k$-Galoisalgebra mit der Wirkung durch Konjugation: $\sigma(f) = \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}$.*

*2. Ist $A$ eine $K|k$-Galoisalgebra, so trägt die entgegengesetzte Algebra $A^{\mathrm{op}}$ wiederum die Struktur einer $K|k$-Galoisalgebra.* ■

**Lemma 1.7.** *Man hat natürliche Homomorphismen von $K|k$-Galoisalgebren:*

1. $\mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W) \longrightarrow \mathrm{End}(V \otimes W)$.

2. $\mathrm{End}(V)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{End}(V^*)$.

3. $A \otimes A^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$, *wobei $V$ der unterliegende Galoismodul der Galoisalgebra $A$ ist.*

*Diese sind Isomorphismen, falls $V, W$ endlichdimensional sind, bzw. falls $A$ zerfällt*[2]*, oder allgemeiner, falls die unterliegende $K$-Algebra von $A$ zentraleinfach ist.* ■

## 2. Wechsel der Galoiserweiterung

Wir wollen uns von nun an einen Körperturm $M|L|K|m|\ell|k$ vorgeben und für die nachfolgenden Abschnitte festhalten. Dabei sei vorausgesetzt, dass die Erweiterungen Großbuchstabe | Kleinbuchstabe jeweils galoissch und die Erweiterungen Kleinbuchstabe | Kleinbuchstabe jeweils endlich separabel seien.

**Definition 2.1.** Die *Inflation* $\mathrm{Inf}_{K|k}^{L|k} \colon \mathsf{GMod}(K|k) \longrightarrow \mathsf{GMod}(L|k)$ ordnet einem $K|k$-Galoismodul $V$ den $L|k$-Galoismodul $L \otimes_K V$ zu. Die Galoiswirkung hierauf ist durch

$$\sigma(\alpha \otimes v) = \sigma(\alpha) \otimes \sigma|_K(v)$$

[2]Vgl. Definition 4.3

gegeben. Zusammen mit den offensichtlichen Vergleichsabbildungen

$$(L \otimes_K V) \otimes (L \otimes_K W) \longrightarrow L \otimes_K (V \otimes W)$$

wird die Inflation zu einem symmetrisch monoidalen Funktor.

**Definition 2.2.** Die *Restriktion* $\mathrm{Res}_{K|k}^{K|\ell} \colon \mathsf{GMod}(K|k) \longrightarrow \mathsf{GMod}(K|\ell)$ ordnet einem $K|k$-Galoismodul $V$ den $K|\ell$-Galoismodul zu, welcher durch Einschränken der Galoiswirkung von $G(K|k)$ auf $G(K|\ell)$ entsteht. Sie trägt offensichtlich die Struktur eines symmetrisch monoidalen Funktors.

**Lemma 2.3.** *Es gelten die folgenden Isomorphien symmetrisch monoidaler Funktoren:*

1. $\mathrm{Inf}_{L|k}^{M|k} \circ \mathrm{Inf}_{K|k}^{L|k} \cong \mathrm{Inf}_{K|k}^{M|k}$.
2. $\mathrm{Res}_{L|k}^{L|\ell} \circ \mathrm{Inf}_{K|k}^{L|k} \cong \mathrm{Inf}_{K|\ell}^{L|\ell} \circ \mathrm{Res}_{K|k}^{K|\ell}$.
3. $\mathrm{Res}_{K|\ell}^{K|m} \circ \mathrm{Res}_{K|k}^{K|\ell} \cong \mathrm{Res}_{K|k}^{K|m}$.

*Beweis.* Die erste Isomorphie ist durch die offensichtlichen Isomorphismen $M \otimes_L (L \otimes_K V) \cong M \otimes_K V$ gegeben. Die zweite und die dritte Isomorphie sind tatsächlich Gleichheiten. ∎

**Bemerkung 2.4.** Wir können die Kategorie der $k$-Vektorräume mit der Kategorie der $k|k$-Galoismoduln identifizieren. Insbesondere haben wir den Inflationsfunktor

$$\mathrm{Inf}_{k|k}^{K|k} \colon \mathsf{Mod}(k) \longrightarrow \mathsf{GMod}(K|k)\,, \qquad V \longmapsto K \otimes_k V\,.$$

Wir bezeichnen den gewöhnlichen Funktor der Skalarerweiterung entlang $\ell|k$ in dem aktuellen Zusammenhang als *Restriktion*:

$$\mathrm{Res}_k^\ell \colon \mathsf{Mod}(k) \longrightarrow \mathsf{Mod}(\ell)\,.$$

Es gilt

$$\mathrm{Res}_{K|k}^{K|\ell} \circ \mathrm{Inf}_{k|k}^{K|k} \cong \mathrm{Inf}_{\ell|\ell}^{K|\ell} \circ \mathrm{Res}_k^\ell\ .$$

**Bemerkung 2.5.** Um auch einen Korestriktionsfunktor definieren zu können, benötigen wir einige Vorbemerkungen über Repräsentantensysteme. Ist $G$ eine (proendliche) Gruppe und $H$ eine (offene) Untergruppe, so ist ein *Repräsentantensystem* $R$ für $H$ in $G$ eine Menge von Elementen $\rho \in G$, derart, dass $R \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/H$ bijektiv ist. Ist nun $\sigma \in G$ und $\rho \in R$, so gibt es eine eindeutige Darstellung

$$\sigma\rho = {}^\sigma\!\rho\,\delta(\sigma,\rho) \qquad \text{mit} \quad {}^\sigma\!\rho \in R\,, \quad \delta(\sigma,\rho) \in H\,. \tag{1}$$

Durch Vergleich der definierenden Gleichungen folgert man leicht:

$$^{\sigma}({}^{\tau}\rho) = {}^{\sigma\tau}\rho\,, \qquad \delta(\sigma\tau,\rho) = \delta(\sigma,{}^{\tau}\rho)\delta(\tau,\rho)\,. \tag{2}$$

Ist $R'$ ein weiteres Repräsentantensystem und $\rho \in R$, so gibt es eine eindeutige Darstellung

$$\rho = \rho' h_\rho \qquad \text{mit} \quad \rho' \in R'\,, \quad h_\rho \in H\,. \tag{3}$$

Man liest leicht ab, dass:

$$^{\sigma}(\rho') = ({}^{\sigma}\rho)'\,, \qquad h_{^{\sigma}\rho}\delta(\sigma,\rho) = \delta(\sigma,\rho')h_\rho\,. \tag{4}$$

Sei $\pi\colon G \longrightarrow G'$ eine Quotientenabbildung proendlicher Gruppen, $H'$ eine offene Untergruppe von $G'$ und $H := \pi^{-1}(H')$. Ist dann $R$ ein Repräsentantensystem für $H$ in $G$, so ist $\pi(R)$ ein Repräsentantensystem für $H'$ in $G'$. Außerdem gilt

$$^{\pi(\sigma)}\pi(\rho) = \pi({}^{\sigma}\rho)\,, \qquad \delta(\pi(\sigma),\pi(\rho)) = \pi(\delta(\sigma,\rho))\,. \tag{5}$$

Es sei $H$ eine offene Untergruppe von $G$ und $K$ eine offene Untergruppe von $H$. Ist dann $R_1$ ein Repräsentantensystem für $H$ in $G$ und $R_2$ ein Repräsentantensystem für $K$ in $H$, so ist $R_1 \cdot R_2$ ein Repräsentantensystem für $K$ in $G$. Es gilt:

$$^{\sigma}(\rho_1\rho_2) = {}^{\sigma}\rho_1 \cdot {}^{\delta(\sigma,\rho_1)}\rho_2\,, \qquad \delta(\sigma,\rho_1\rho_2) = \delta(\delta(\sigma,\rho_1),\rho_2)\,. \tag{6}$$

**Bemerkung 2.6.** Ist $V$ ein $K$-Vektorraum und $\rho$ ein Körperautomorphismus von $K$, so bezeichnen wir mit ${}^{\rho}V$ den $K$-Vektorraum, welcher als abelsche Gruppe mit $V$ übereinstimmt, aber mit der alternativen Skalarmultiplikation

$$\alpha \odot v = \rho^{-1}(\alpha) \cdot v$$

ausgestattet ist. Es gilt ${}^{\rho_1}({}^{\rho_2}V) = {}^{\rho_1\rho_2}V$ und ${}^{\rho}(V \otimes W) = {}^{\rho}V \otimes {}^{\rho}W$.

**Definition 2.7.** Es sei $V$ ein $K|\ell$-Galoismodul. Sei $R$ ein Repräsentantensystem für $G(K|\ell)$ in $G(K|k)$. Auf dem $K$-Vektorraum $\bigotimes_{\rho\in R} {}^{\rho}V$ wird durch

$$\sigma(\cdots \otimes v_\rho \otimes \dots) = \cdots \otimes \underbrace{\delta(\sigma,\rho)(v_\rho)}_{^{\sigma}\rho\text{-e Position}} \otimes \dots$$

eine $K|k$-Galoismodulstruktur gegeben. Diese Konstruktion gibt Anlass zu einem symmetrisch monoidalen Funktor, welcher bis auf Isomorphie von dem Repräsentantensystem $R$ unabhängig ist, und welchen wir *Korestriktion* nennen:

$$\mathrm{Cores}_{K|\ell}^{K|k}\colon \mathsf{GMod}(K|\ell) \longrightarrow \mathsf{GMod}(K|k)\,.$$

*Beweis.* Wir gehen hier etwas skizzenhaft vor. Um einzusehen, dass tatsächlich eine Wirkung definiert wird, verwendet man die Formeln Gleichung (1) und Gleichung (2):

$$\begin{aligned}\sigma(\tau(\cdots \otimes v_\rho \otimes \dots)) &= \sigma(\cdots \otimes \underbrace{\delta(\tau,\rho)(v_\rho)}_{{}^\tau\!\rho\text{-e Position}} \otimes \dots) \\ &= \cdots \otimes \underbrace{\delta(\sigma, {}^\tau\!\rho)\delta(\tau,\rho)(v_\rho)}_{{}^\sigma({}^\tau\!\rho)\text{-e Position}} \otimes \dots = (\sigma\tau)(\cdots \otimes v_\rho \otimes \dots)\,.\end{aligned}$$

Ähnlich prüft man nach, dass die Wirkung semilinear ist; hierbei ist die abgewandelte Skalarmultiplikation in den einzelnen Faktoren des Tensorproduktes zu beachten. Die Zuordnung ist offenbar funktoriell und eine symmetrisch monoidale Struktur ist durch die Vergleichsabbildungen

$$\left(\bigotimes_{\rho\in R} {}^\rho V\right) \otimes \left(\bigotimes_{\rho\in R} {}^\rho W\right) \cong \bigotimes_{\rho\in R} ({}^\rho V \otimes {}^\rho W) = \bigotimes_{\rho\in R} {}^\rho(V \otimes W)$$

gegeben. Alle nötigen Kompatibilitäten sind leicht nachzurechnen.

Ist $R'$ ein anderes Repräsentantensystem, so ist der gesuchte Isomorphismus gegeben durch

$$\bigotimes_{\rho\in R} {}^\rho V \longrightarrow \bigotimes_{\rho'\in R} {}^{\rho'} V\,, \qquad (\cdots \otimes \underbrace{v_\rho}_{\rho\text{-e Pos.}} \otimes \dots) \longmapsto (\cdots \otimes \underbrace{h_\rho(v_\rho)}_{\rho'\text{-e Pos.}} \otimes \dots)\,.$$

Mithilfe von Gleichung (3) und Gleichung (4) prüft man alle nötigen Kompatibilitäten nach. ∎

**Lemma 2.8.** *Es gelten die folgenden Isomorphien symmetrisch monoidaler Funktoren:*

1. $\mathrm{Cores}^{L|k}_{L|\ell} \circ \mathrm{Inf}^{L|\ell}_{K|\ell} \cong \mathrm{Inf}^{L|k}_{K|k} \circ \mathrm{Cores}^{K|k}_{K|\ell}$.

2. $\mathrm{Cores}^{K|k}_{K|\ell} \circ \mathrm{Cores}^{K|\ell}_{K|m} \cong \mathrm{Cores}^{K|k}_{K|m}$.

*Beweis.* Das Prinzip ist dasselbe wie oben bereits angewandt. Zunächst wählt man geeignete Repräsentantensysteme, wie es in Bemerkung 2.5 beschrieben wurde. Anschließend schreibt man einen offensichtlichen Isomorphismus von Vektorräumen auf und von diesem zeigt man mithilfe von Gleichung (5) und Gleichung (6), dass es ein äquivarianter Isomorphismus von Galoismoduln ist. ∎

**Lemma 2.9.** *Es gibt natürliche Homomorphismen, welche Isomorphismen sind, falls $V$ endlich-dimensional ist:*

1. $\mathrm{Inf}^{L|k}_{K|k}(\mathrm{End}(V)) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{Inf}^{L|k}_{K|k}(V))$ *für einen $K|k$-Galoismodul $V$.*

2. $\mathrm{Res}^{K|\ell}_{K|k}(\mathrm{End}(V)) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{Res}^{K|\ell}_{K|k}(V))$ *für einen $K|\ell$-Galoismodul $V$.*

3. $\operatorname{Cores}_{K|\ell}^{K|k}(\operatorname{End}(V)) \longrightarrow \operatorname{End}(\operatorname{Cores}_{K|\ell}^{K|k}(V))$ *für einen $K|\ell$-Galoismodul $V$.*

*Beweis.* Die Isomorphismen der unterliegenden Algebren sind alle wohlbekannt aus der linearen Algebra. Es ist hier deshalb lediglich nachzuprüfen, dass sie mit den jeweiligen Galoiswirkungen verträglich sind, was wir hier nicht vorrechnen. ■

# 3. Galoisabstieg

**Bemerkung 3.1.** Der Inflationsfunktor $\operatorname{Inf}_{K|k}^{L|k} \colon \mathsf{GMod}(K|k) \longrightarrow \mathsf{GMod}(L|k)$ besitzt einen symmetrisch monoidal Rechtsadjungierten: Dieser sendet einen $L|k$-Galoismodul $W$ auf die Invarianten $W^{G(L|K)}$ unter $G(L|K)$. Wegen der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow G(L|K) \longrightarrow G(L|k) \longrightarrow G(K|k) \longrightarrow 0$$

setzt sich die Wirkung von $G(L|k)$ tatsächlich wohldefiniert zu einer Wirkung von $G(K|k)$ auf $W^{G(L|K)}$ fort.

Einheit und Koeinheit der Adjunktion sind gegeben durch

$$\eta \colon V \longrightarrow (L \otimes_K V)^{G(L|K)}\,, \qquad v \longmapsto 1 \otimes v\,,$$

sowie

$$\varepsilon \colon L \otimes_K W^{G(L|K)} \longrightarrow W\,, \qquad \alpha \otimes w \longmapsto \alpha w\,.$$

**Satz 3.2** (Galoisabstieg)**.** *Die oben beschriebene Adjunktion ist eine Äquivalenz symmetrisch monoidaler Kategorien. Insbesondere ist jeder $K|k$-Galoismodul frei.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass $\varepsilon$ injektiv ist: Sei dazu $(w_i)$ eine Basis von $W^{G(L|K)}$ als $K$-Vektorraum. Zu zeigen ist, dass die $w_i$ auch $L$-linear unabhängig als Elemente von $W$ sind. Es genügt, dies jeweils für endlich viele $w_i$ zu zeigen. Per Induktion nach $n$ zeigen wir also, dass aus einer Gleichung $\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n = 0$ mit $\alpha_i \in L$ bereits $\alpha_i = 0$ für alle $i$ folgt. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei daher $n > 0$. Wir können annehmen, dass $a_n = 1$ gilt und wollen einen Widerspruch zur Induktionsannahme erzeugen. Anwenden eines $\sigma \in G(L|K)$ liefert $0 = \sigma(\alpha_1)w_1 + \cdots + \sigma(\alpha_n)w_n$. Durch Subtraktion erhalten wir

$$0 = (\alpha_1 - \sigma(\alpha_1))w_1 + \cdots + (\alpha_{n-1} - \sigma(\alpha_{n-1}))w_{n-1} + (\alpha_n - \sigma(\alpha_n))w_n\,.$$

Da der letzte Summand verschwindet, folgt aus der Induktionsannahme, dass $\alpha_i = \sigma(\alpha_i)$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Da $\sigma$ beliebig war, sehen wir, dass die $\alpha_i$ tatsächlich bereits aus $K$ stammen. Nun impliziert die Voraussetzung, dass $\alpha_i = 0$ für alle $i$.

Um zu zeigen, dass $\varepsilon$ surjektiv ist, müssen wir ein beliebiges Element $w \in W$ als $L$-Linearkombination von Elementen aus $W^{G(L|K)}$ schreiben. Der Stabilisator $G_w$ ist offen in $G(L|k)$, folglich ist $\mathrm{Fix}(G_w)|k$ endlich. Vergrößern wir $\mathrm{Fix}(G_w)$ etwas, finden wir eine endliche Galoiserweiterung $K'|k$ so, dass $G(L|K')$ trivial auf $w$ wirkt. Nun ist das Kompositum $L' := KK'$ endlich über $K$ und $G(L|L')$ wirkt trivial auf $w$, das heißt, es gilt $w \in W^{G(L|L')}$. Durch Übergang von $L$ zu $L'$ und von $W$ zu $W^{G(L|L')}$ dürfen wir daher annehmen, dass $L|K$ endlich ist. Sei nun $G(L|K) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ und sei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine $K$-Basis für $L$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(\alpha_1) & \cdots & \sigma_n(\alpha_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_1(\alpha_n) & \cdots & \sigma_n(\alpha_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1(w) \\ \vdots \\ \sigma_n(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \sigma_i(\alpha_1 w) \\ \vdots \\ \sum \sigma_i(\alpha_n w) \end{pmatrix}.$$

Die Einträge des Vektors auf der rechten Seite liegen sicherlich in $W^{G(L|K)}$. Multiplizieren wir die Gleichung mit der Inversen der Matrix[3], so erhalten wir eine Darstellung der $\sigma_i(w)$ als $L$-Linearkombination von Elementen aus $W^{G(L|K)}$; insbesondere für $\sigma_i = \mathrm{id}$ also eine Darstellung für $w$.

Nun wenden wir das gerade Gezeigte auf $\mathrm{Inf}_{k|k}^{K|k} \colon \mathsf{Mod}(k) \longrightarrow \mathsf{GMod}(K|k)$ an. Sei $V$ ein $K|k$-Galoismodul. Dann ist $\varepsilon$ ein Isomorphismus $K \otimes_k V^{G(K|k)} \cong V$, wobei $V^{G(K|k)}$ als ein $k$-Vektorraum sicherlich frei ist. Folglich ist auch $V$ frei.

Um nachzuweisen, dass $\eta$ ein Isomorphismus ist, können wir daher verwenden, dass $V$ ein freier $K|k$-Galoismodul ist, und hiermit ist die Behauptung klar. ∎

**Bemerkung 3.3.** Was wir in diesem und dem letzten Abschnitt erreicht haben, ist die Konstruktion symmetrisch monoidaler Funktoren, welche ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Mod}(k) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \mathsf{GMod}(K|k) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathsf{GMod}(L|k) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathsf{GMod}(M|k) \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] \\
\mathsf{Mod}(\ell) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \mathsf{GMod}(K|\ell) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathsf{GMod}(L|\ell) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathsf{GMod}(M|\ell) \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] \\
\mathsf{Mod}(m) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] & \mathsf{GMod}(K|m) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] & \mathsf{GMod}(L|m) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] & \mathsf{GMod}(M|m) \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"']
\end{tikzcd}$$

bilden, das auf jede erdenkliche Weise kommutiert. Da die horizontalen Funktoren Äquivalenzen sind, gibt es auch einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Funktor $\mathrm{Cores}_\ell^k \colon \mathsf{Mod}(\ell) \longrightarrow \mathsf{Mod}(k)$, welcher das Diagramm auf der linken Seite kommutativ ergänzt. Außerdem steht es uns offen, die linke Spalte auf die rechte Seite zu versetzen, und

[3] Die Zeilen der Matrix sind wegen der Unabhängigkeit von Charakteren linear unabhängig.

anstelle des Inflationsfunktors den dazu inversen Invariantenfunktor einzuzeichnen:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{GMod}(K|k) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathsf{GMod}(L|k) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathsf{GMod}(M|k) \arrow[r, "(-)^{G(M|k)}"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathsf{Mod}(k) \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] \\
\mathsf{GMod}(K|\ell) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathsf{GMod}(L|\ell) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathsf{GMod}(M|\ell) \arrow[r, "(-)^{G(M|\ell)}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathsf{Mod}(\ell) \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] \\
\mathsf{GMod}(K|m) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] & \mathsf{GMod}(L|m) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] & \mathsf{GMod}(M|m) \arrow[r, "(-)^{G(M|m)}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] & \mathsf{Mod}(m)\,. \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"']
\end{tikzcd}$$

Aus allgemeinen Gründen wird automatisch ein kommutatives Diagramm symmetrisch monoidaler Funktoren zwischen den jeweiligen Monoidkategorien induziert:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{GAlg}(K|k) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathsf{GAlg}(L|k) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathsf{GAlg}(M|k) \arrow[r, "(-)^{G(M|k)}"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathsf{Alg}(k) \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] \\
\mathsf{GAlg}(K|\ell) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathsf{GAlg}(L|\ell) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathsf{GAlg}(M|\ell) \arrow[r, "(-)^{G(M|\ell)}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathsf{Alg}(\ell) \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] \\
\mathsf{GAlg}(K|m) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] & \mathsf{GAlg}(L|m) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] & \mathsf{GAlg}(M|m) \arrow[r, "(-)^{G(M|m)}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] & \mathsf{Alg}(m)\,. \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"']
\end{tikzcd}$$

# 4. Brauergruppen

Von nun an werden alle betrachteten Vektorräume und Galoismoduln als endlichdimensional und $\neq 0$ vorausgesetzt.

**Lemma 4.1.** *Es sei G ein kommutatives Monoid und H ein Untermonoid. Dann wird durch $a \sim b \iff \exists x, y \in H : xa = yb$ eine Äquivalenzrelation auf G definiert. Die Multiplikation von G setzt sich wohldefiniert auf die Menge der Äquivalenzklassen $G/H := G/\sim$ fort. Die Projektion $G \longrightarrow G/H$ erfüllt die universelle Eigenschaft eines Kokerns der Einbettung $H \longrightarrow G$.* ■

**Definition 4.2.** Ist $k$ ein Körper, so definieren wir die *absolute Brauergruppe* $\mathrm{Br}(k)$ als das Monoid

$$\mathrm{Br}(k) := \frac{\{\text{Isomorphieklassen zentraleinfacher } k\text{-Algebren}\}}{\{\text{Isomorphieklassen der Endomorphismenalgebren } \mathrm{End}(V)\}}\,.$$

**Definition 4.3.** Wir sagen, eine $K|k$-Galoisalgebra *A zerfalle*, wenn es einen (nicht notwendigerweise äquivarianten) Isomorphismus $A \cong \mathrm{End}(V)$ von $K$-Algebren für einen

$K|k$-Galoismodul $V$ gibt. Wir definieren die *relative Brauergruppe* $\mathrm{Br}(K|k)$ durch

$$\mathrm{Br}(K|k) := \frac{\{\text{Isomorphieklassen zerfallender } K|k\text{-Galoisalgebren}\}}{\{\text{Isomorphieklassen der Endomorphismenalgebren } \mathrm{End}(V)\}}.$$

**Bemerkung 4.4.** Aus Lemma 2.9 folgt natürlich, dass alle dort vorkommenden Funktoren Endomorphismenalgebren auf Endomorphismenalgebren und somit zerfallende Galoisalgebren auf zerfallende Galoisalgebren schicken. Folglich wird ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Br}(K|k) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathrm{Br}(L|k) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathrm{Br}(M|k) \arrow[r, "(-)^{G(M|k)}"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathrm{Br}(k) \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] \\
\mathrm{Br}(K|\ell) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathrm{Br}(L|\ell) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathrm{Br}(M|\ell) \arrow[r, "(-)^{G(M|\ell)}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathrm{Br}(\ell) \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] \\
\mathrm{Br}(K|m) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] & \mathrm{Br}(L|m) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] & \mathrm{Br}(M|m) \arrow[r, "(-)^{G(M|m)}"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] & \mathrm{Br}(m) \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"']
\end{tikzcd}$$

zwischen den Brauergruppen induziert. Da ferner durch die horizontalen Operationen Endomorphismen(galois)algebren Eins zu Eins mit Endomorphismen(galois)algebren identifiziert werden und diese Operationen zudem Isomorphie reflektieren, folgt, dass die horizontalen Homomorphismen sogar injektiv sind.

**Lemma 4.5.** *Die Sequenz* $0 \longrightarrow \mathrm{Br}(K|k) \xrightarrow{(-)^{G(K|k)}} \mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{Br}(K)$ *ist exakt.*

*Beweis.* Für $A \in \mathrm{Br}(K|k)$ ist $\mathrm{Res}_k^K(A^{G(K|k)}) = K \otimes_k A^{G(K|k)} \cong A$ als $K$-Algebren. Als $K|k$-Galoisalgebra zerfällt $A$ jedoch, was gerade bedeutet, dass $A$ als $K$-Algebra zu einer Endomorphismenalgebra isomorph ist.

Ist $A$ eine $k$-Algebra derart, dass $\mathrm{Res}_k^K(A) = 0$ in $\mathrm{Br}(K)$ gilt, so bedeutet dies per Definition, dass es $K$-Vektorräume $V$ und $W$ und einen Homomorphismus von $K$-Algebren $(K \otimes_k A) \otimes_K \mathrm{End}(V) \cong \mathrm{End}(W)$ gibt. Wählen wir eine Strukur als $K|k$-Galoismodul auf $V$ und $W$ (dies ist nach Wahl von Basen möglich), so bezeugt dieser Isomorphismus, dass $\mathrm{Inf}_{k|k}^{K|k}(A) \otimes \mathrm{End}(V)$ eine zerfallende $K|k$-Galoisalgebra ist, also ein Element von $\mathrm{Br}(K|k)$ definiert. Es handelt sich um das gesuchte Urbild von $A$. ■

**Lemma 4.6.** *Es seien* $[A], [B] \in \mathrm{Br}(K|k)$ *bzw.* $\mathrm{Br}(k)$ *mit derselben* $K$*-Dimension bzw.* $k$*-Dimension. Dann gilt* $[A] = [B]$ *nur dann, wenn* $A$ *und* $B$ *isomorph sind.*

*Beweis.* Durch Anwenden der Invarianten $(-)^{G(K|k)}$ können wir uns auf den Fall der absoluten Brauergruppe beschränken. Dort folgt die Aussage aus dem Struktursatz von Wedderburn. ■

Wir zitieren an dieser Stelle eine elementare, gleichwohl wichtige Tatsache aus der klassischen Theorie der Brauergruppen:

**Satz 4.7.** *Ist $A \in \mathrm{Br}(k)$, so gibt es eine endliche Galoiserweiterung $K|k$ derart, dass $\mathrm{Res}_k^K(A) = 0$ in $\mathrm{Br}(K)$ gilt.*

*Beweis.* [Dra83, §9, Theorem 9] ■

**Korollar 4.8.**
1. *Ist $k$ separabel abgeschlossen, so gilt $\mathrm{Br}(k) = 0$.*
2. *Die Abbildung $\mathrm{Br}(k^{\mathrm{s}}|k) \longrightarrow \mathrm{Br}(k)$ ist ein Isomorphismus.*
3. *Die Abbildungen $\mathrm{Br}(K|k) \longrightarrow \mathrm{Br}(k)$ induzieren einen Isomorphismus*

$$\operatorname*{colim}_{\substack{K|k \\ \text{endl., gal.}}} \mathrm{Br}(K|k) \cong \mathrm{Br}(k)\,. \qquad ■$$

# 5. Verschränkte Produkte

Die relativen Brauergruppen, welche wir beispielsweise benötigen, um über Korestriktion sprechen zu können, liegen durch den Invariantenfunktor

$$\mathrm{Br}(K|k)(-)^{G(K|k)} \longrightarrow \mathrm{Br}(k)$$

eingebettet in der absoluten Brauergruppe. Wegen des Satzes über Galoisabstieg ist diese Operation gut theoretisch handhabbar. Dennoch braucht man gelegentlich eine Alternative, mit der es sich leichter rechnen lässt, als mit den Invarianten $A^{G(K|k)}$. Hierzu wollen wir annehmen, dass $K|k$ endlich ist.

**Definition 5.1.** Es sei $A$ eine $K|k$-Galoisalgebra. Das *verschränkte Produkt* von $A$ ist die $k$-Algebra

$$\Pi(A) := \bigoplus_{\sigma \in G(K|k)} Ae_\sigma\,,$$

mit der formalen Multiplikation

$$e_\sigma a = \sigma(a) e_\sigma\,, \qquad e_\sigma e_\tau = e_{\sigma\tau}\,.$$

**Lemma 5.2.** *Es gilt:*

1. $\Pi(K) \cong \mathrm{End}_k(K)$.
2. *Es gibt einen Homomorphismus $\Pi(K) \otimes_k A^{G(K|k)} \longrightarrow \Pi(A)$.*
3. *Für $[A] \in \mathrm{Br}(K|k)$ ist 2. ein Isomorphismus. Insbesondere gilt $[A^{G(K|k)}] = [\Pi(A)]$ in $\mathrm{Br}(k)$.*

*Beweis.* 1. Es bezeichne $L_a \in \mathrm{End}_k(K)$ die Linksmultiplikation mit einem Element $a \in K$. Außerdem sei $E_\sigma$ eine Schreibweise für $\sigma$, aufgefasst als Element von $\mathrm{End}_k(K)$. In $\mathrm{End}_k(K)$ gelten die Relationen

$$E_\sigma \circ L_a = \sigma(a) \circ E_\sigma\,, \qquad E_\sigma \circ E_\tau = E_{\sigma\tau}.$$

Folglich wird ein Homomorphismus $\Pi(K) \longrightarrow \mathrm{End}_k(K)$ induziert, welcher $a$ auf $L_a$ und $e_\sigma$ auf $E_\sigma$ schickt. Dieser ist injektiv wegen der linearen Unabhängigkeit von Charakteren und surjektiv aus Dimensionsgründen.

2. Der Homomorphismus ist gegeben durch $\alpha e_\sigma \otimes a \longmapsto \alpha e_\sigma \cdot a e_{\mathrm{id}}$.

3. Ist $[A] \in \mathrm{Br}(K|k)$, so ist die linke Seite zentraleinfach, der Homomorphismus folglich injektiv und aus Dimensionsgründen surjektiv. ∎

**Lemma 5.3.** *Es sei eine $K$-Algebra $A$ gegeben, welche durch zwei verschiedene Wirkungen zu einer zerfallenden $K|k$-Galoisalgebra wird; zur Unterscheidung einerseits als ${}^s\sigma(a)$ und andererseits als ${}^t\sigma(a)$ geschrieben. Es seien Einheiten $\lambda_\sigma \in A^\times$ gegeben, welche den Relationen*

$$\lambda_\sigma {}^t\sigma(a) = {}^s\sigma(a)\lambda_\sigma\,, \qquad \lambda_\sigma {}^t\sigma(\lambda_\tau) = \lambda_{\sigma\tau}$$

*genügen. Dann gilt $\Pi(A,s) \cong \Pi(A,t)$.*

*Beweis.* Die Erzeuger von $\Pi(A,s)$ seien mit $e_\sigma$, die von $\Pi(A,t)$ mit $f_\sigma$ bezeichnet. Setze $e'_\sigma := \lambda_\sigma f_\sigma \in \Pi(A,t)$. Dann gilt $e'_\sigma a = {}^s\sigma(a)e'_\sigma$, sowie $e'_\sigma e'_\tau = e'_{\sigma\tau}$. Folglich gibt es einen Homomorphismus $e_\sigma \longmapsto e'_\sigma$. Da die $\lambda_\sigma$ Einheiten sind, ist die Abbildung bijektiv. ∎

# 6. Die $\mathrm{Cores} \circ \mathrm{Res}$-Formel

**Lemma 6.1.** *Sei $G$ eine Gruppe, welche durch $(\sigma,\rho) \longmapsto {}^\sigma\rho$ auf eine endliche Menge $R$ wirke. Ferner sei $A$ eine $K$-Algebra, welche isomorph zu $\mathrm{End}(V)$ für einen Vektorraum $V$ sei. Dann gibt es Einheiten $\lambda_\sigma \in (\bigotimes_{\rho\in R} A)^\times$, welche*

$$\lambda_\sigma \cdot (\cdots \otimes \underbrace{a_\rho}_{\rho\text{-Pos.}} \otimes \ldots) = (\cdots \otimes \underbrace{a_\rho}_{{}^\sigma\rho\text{-e Pos.}} \otimes \ldots) \cdot \lambda_\sigma$$

*und zugleich $\lambda_\sigma\lambda_\tau = \lambda_{\sigma\tau}$ erfüllen.*

*Beweis.* Wir können das Problem vermittels des Isomorphismus

$$\bigotimes_{\rho\in R} A \cong \bigotimes_{\rho\in R} \mathrm{End}(V) \cong \mathrm{End}(\bigotimes_{\rho\in R})$$

nach $\mathrm{End}(\bigotimes_{\rho\in R} V_\rho)$ transportieren. Dort sind die gesuchten Elemente durch

$$\lambda_\sigma(\cdots\otimes \underbrace{v_\rho}_{\rho\text{-e Pos.}} \otimes\dots) = \cdots\otimes \underbrace{v_\rho}_{{}^\sigma\rho\text{-e Pos.}} \otimes\dots$$

gegeben. ■

**Lemma 6.2.** *Angenommen, $K|k$ ist endlich und $[A]\in \mathrm{Br}(K|k)$. Dann gilt*

$$\mathrm{Cores}^{K|k}_{K|\ell}(\mathrm{Res}^{K|\ell}_{K|k}(A)) \cong A^{\otimes[\ell:k]}\,.$$

*Beweis.* Wir wählen ein Repräsentantensystem $R$. Man prüft zunächst nach, dass die linke Seite einfach nur die $K$-Algebra $\bigotimes_{\rho\in R} A$ mit der Galoiswirkung

$${}^s\sigma(\cdots\otimes \underbrace{a_\rho}_{\rho\text{-e Pos.}} \otimes\dots) = \cdots\otimes \underbrace{\sigma(a_\rho)}_{{}^\sigma\rho\text{-e Pos.}} \otimes\dots\,.$$

Die rechte Seite lässt sich auffassen als dieselbe $K$-Algebra $\bigotimes_{\rho\in R} A$, allerdings mit der Wirkung

$${}^t\sigma(\cdots\otimes \underbrace{a_\rho}_{\rho\text{-e Pos.}} \otimes\dots) = \cdots\otimes \underbrace{\sigma(a_\rho)}_{\rho\text{-e Pos.}} \otimes\dots\,,$$

ohne Permutation der Faktoren.

Um zu zeigen, dass diese beiden $K|k$-Galoisalgebren isomorph sind, genügt es zu zeigen, dass sie nach Bildung der Invarianten isomorphe $k$-Algebren werden. Hierzu genügt es nach Lemma 5.2, dass ihre verschränkten Produkte isomorph sind.

Da $A$ nach Voraussetzung als Galoisalgebra zerfällt, gibt es einen Isomorphismus $A\cong \mathrm{End}(V)$ von $K$-Algebren. Die Elemente aus Lemma 6.1 genügen gerade den Bedingungen aus Lemma 5.3. Hieraus folgt die Behauptung. ■

**Satz 6.3.** *Für $[A]\in\mathrm{Br}(k)$ gilt $\mathrm{Cores}^k_\ell(\mathrm{Res}^\ell_k(A))\cong A^{[\ell:k]}$. Insbesondere ist die Verknüpfung*

$$\mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{Br}(\ell) \xrightarrow{\mathrm{Cores}} \mathrm{Br}(k)$$

*durch Multiplikation mit dem Grad $[\ell : k]$ gegeben.*

*Beweis.* Gemäß Korollar 4.8 finden wir eine endliche Galoiserweiterung $K|k$ derart, dass $[\mathrm{Inf}^{K|k}_{k|k}(A)]\in\mathrm{Br}(K|k)$. Daher folgt die Aussage aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{GAlg}(K|k) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] & \mathsf{Alg}(k) \arrow[d, shift right, "\mathrm{Res}"'] \\
\mathsf{GAlg}(K|\ell) \arrow[r] \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"'] & \mathsf{Alg}(\ell) \arrow[u, shift right, "\mathrm{Cores}"']
\end{tikzcd}$$

und Lemma 6.2. ■

**Beispiel 6.4.** Satz 6.3 gilt nicht, falls $A$ nicht zentraleinfach ist. Sei etwa $\ell|k = \mathbb{C}|\mathbb{R}$ und wähle $K = \mathbb{C}$. Außerdem sei $A = \mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Algebra. Es sei $\sigma \in G(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ die komplexe Konjugation. Dann ist $A' := \operatorname{Inf}_{k|k}^{K|k}(A) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ mit der Wirkung

$$\sigma(x \otimes y) = \sigma(x) \otimes y\,.$$

Folglich ist $\operatorname{Cores}_{K|k}^{K|\ell}(\operatorname{Res}(A')) = A' \otimes_{\mathbb{C}} A'$ mit der Wirkung

$$\sigma((x \otimes y) \otimes (z \otimes w)) = (\sigma(z) \otimes w) \otimes (\sigma(x) \otimes y)\,.$$

Dies ist isomorph zu $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ mit der Wirkung

$$\sigma(x \otimes (y \otimes w)) = \sigma(x) \otimes (w \otimes y)\,.$$

Hierin ist das folgende System dreier orthogonaler idempotenter, $\sigma$-invarianter Elemente enthalten:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}\big(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes i \otimes i - i \otimes 1 \otimes i + i \otimes i \otimes 1\big)\\
&\tfrac{1}{4}\big(1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes i \otimes i - i \otimes i \otimes 1 + i \otimes 1 \otimes i\big)\\
&\tfrac{1}{2}\big(1 \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes i \otimes i\big)
\end{aligned}$$

Dahingegen zerfällt $A \otimes_{\mathbb{R}} A = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ nur in das Produkt zweier nichttrivialer Ringe.

**Bemerkung 6.5.** Das Beispiel 6.4 ist aus [Tig87] übernommen und liefert ein Gegenbeispiel zu [Dra83, §8 Lemma 9]. Auch der Beweis ist von [Tig87] inspiriert, allerdings insofern abgewandelt, als er keinen Gebrauch von einem Lemma von Haile macht [Vgl. Hai79, Lemma 1.1]. Dieses besagt, dass Lemma 6.1 für beliebige zentraleinfache $K$-Algebren Gültigkeit hat und ist im Gegensatz zu Lemma 6.1 nichttrivial zu beweisen, sondern macht auf etwas subtile Art Gebrauch von einigen Techniken aus der Theorie der zentraleinfachen Algebren.

# Teil II. Zusammenhang zur Galoiskohomologie

## 7. $G$-Kategorien

Es sei $G$ eine proendliche Gruppe.

**Definition 7.1.** Unter einer *$G$-Kategorie* verstehen wir eine Kategorie $\mathcal{A}$, deren Hom-Mengen $\operatorname{Hom}(A, B)$ stets die Struktur einer stetigen $G$-Menge tragen, derart, dass die $G$-Wirkung verträglich mit Identitäten und Komposition ist[4]:

- $\sigma(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$,
- $\sigma(g \circ f) = \sigma(g) \circ \sigma(f)$.

Ein Morphismus $f\colon A \longrightarrow B$ heißt *äquivariant*, falls $\sigma(f) = f$ für alle $\sigma \in G$ gilt. Zwei Objekte $A$, $B$ heißen *äquivariant isomorph*, falls es einen äquivarianten Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

Ist $G = G(K|k)$ die Galoisgruppe einer Galoiserweirung $K|k$, so sprechen wir von einer $K|k$-Kategorie, anstelle von einer $G(K|k)$-Kategorie.

**Bemerkung 7.2.** Wir werden hier im zweiten Teil eine leicht abgewandelte Sichtweise einnehmen. Im ersten Teil hatten wir die Kategorie $\mathsf{GMod}(K|k)$ der $K|k$-Galoismoduln eingeführt. Allerdings tragen die $K|k$-Galoisalgebren auch eine Struktur als $K|k$-Kategorie: Die Hom-$G(K|k)$-Menge von $V$ und $W$ sei dazu die Menge aller $K$-linearen Abbildungen $f\colon V \longrightarrow W$, für welche $G_f = \{\sigma \in G(K|k) \mid \sigma \circ f = f \circ \sigma\}$ eine offene Untergruppe ist. Hierauf wirkt $G(K|k)$ stetig durch Konjugation. Mit dieser Struktur können wir $\mathsf{GMod}(K|k)$ als $K|k$-Kategorie auffassen. *Die Morphismen im Sinne von Definition 1.1 heißen von nun an* äquivariante *Morphismen!*

Ebenso können wir die $K|k$-Galoisalgebren als $K|k$-Kategorie auffassen: Die Hom-$G(K|k)$-Menge $\operatorname{Hom}(A, B)$ sei die Menge aller $K$-Algebrenhomomorphismen $f\colon A \longrightarrow B$, für welche $G_f$ offen in $G(K|k)$ ist.

**Beispiel 7.3.** Ist $G$ eine proendliche Gruppe, so trägt etwa auch die Klasse aller Gruppen, welche mit einer fixierten stetigen Wirkung der Gruppe $G$ durch Gruppenautomorphismen ausgestattet sind, die Struktur einer $G$-Kategorie: $\operatorname{Hom}(A, B)$ sei die Menge aller Gruppenhomomorphismen $f\colon A \longrightarrow B$, für welche $G_f$ offen in $G$ ist.

[4] In der Sprache der Kategorientheorie bedeutet dies nichts anderes, als dass $\mathcal{A}$ eine über der kartesischen Kategorie der stetigen $G$-Mengen angereicherte Kategorie ist.

Allgemeiner führt auf diese Weise jeder Typ algebraischer Strukturen mit stetiger $G$-Wirkung zu einer $G$-Kategorie. Noch allgemeiner kommt natürlich jede Art von Objekt infrage, bei der es sinnvoll ist, von der Stetigkeit einer Wirkung zu sprechen. Ist $G$ diskret, braucht es keine solche Einschränkung.

**Bemerkung 7.4.** Ist $A$ ein Objekt einer $G$-Kategorie, so schränkt sich die Wirkung von $G$ auf $\mathrm{Hom}(A, A)$ zu einer stetigen Wirkung auf die Gruppe $\mathrm{Aut}(A)$ ein.

Ist speziell $V$ ein $K|k$-Vektorraum, so bezeichnen wir dessen Automorphismengruppe (bestehend aus allen invertierbaren, $K$-linearen Abbildungen $f\colon V \longrightarrow V$ mit offenem $G_f$), ausgestattet mit der Konjugationswirkung durch $G(K|k)$ mit $\mathrm{GL}(V)$ und sprechen von der *allgemeinen linearen Gruppe* von $V$.

Ist $A = \mathrm{End}(V)$, so bezeichnen wir die Automorphismengruppe von $A$ mit ihrer $G(K|k)$-Wirkung mit $\mathrm{PGL}(V)$.

Man hat natürliche äquivariante Homomorphismen von $G(K|k)$-Gruppen $K^\times \longrightarrow \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{PGL}(V)$.

**Satz 7.5** (Skolem-Noether)**.** *Ist $V$ endlichdimensional, so ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow K^\times \longrightarrow \mathrm{GL}(V) \longrightarrow \mathrm{PGL}(V) \longrightarrow 0 \tag{7}$$

*exakt.*

*Beweis.* [Dra83, §7, Korollar 1]. ■

# 8. Nichtabelsche Gruppenkohomologie

Wir fassen hier sehr kurz einige Grundbegriffe der nichtabelschen proendlichen Gruppenkohomologie zusammen.

**Definition 8.1.** Ist $A$ eine (möglicherweise nichtkommutative) $G$-Gruppe, so ist ein *verschränkter Homomorphismus* $x\colon G \longrightarrow A$ eine stetige Abbildung, welche der Gleichung $x(\sigma\tau) = x(\sigma)\sigma(x(\tau))$ genügt. Zwei verschränkte Homomorphismen $x, y$ heißen *kohomolog*, falls es ein $a \in A$ mit $ax(\sigma)\sigma(a)^{-1} = y(\sigma)$ für alle $\sigma$ gibt.

Die Menge der verschränkten Homomorphismen modulo der Identifikation kohomologer verschränkter Homomorphismen bildet eine punktierte Menge $H^1(G, A)$, wobei man als Basispunkt den konstanten verschränkten Homomorphismus $1$ wählt.

**Satz 8.2.** *Es sei $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von $G$-Gruppen, bei* *der $A$ in das Zentrum von $B$ eingebettet werde. Dann wird eine natürliche exakte Sequenz*

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow H^0(G,A) \longrightarrow H^0(G,B) \longrightarrow H^0(G,C) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(G,A) \longrightarrow H^1(G,B) \longrightarrow H^1(G,C) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^2(G,A) \end{array}$$

*induziert. Sind auch $B$ und $C$ abelsch, so stimmt die induzierte Sequenz mit dem Beginn der langen exakten Kohomologiesequenz überein.*

*Skizze.* Wir wollen hier lediglich die Konstruktion der Verbindungsabbildung

$$\delta \colon H^1(G,C) \longrightarrow H^2(G,A)$$

angeben. Ist $x \colon G \longrightarrow A$ ein verschränkter Homomorphismus, so wähle jeweils $y(\sigma) \in B$ als Urbild von $x(\sigma) \in C$. Es gilt dann stets $g(y(\sigma) \cdot \sigma(y(\tau)) \cdot y(\sigma\tau)^{-1}) = 0$, sodass es folglich eindeutige Elemente $X(\sigma,\tau) \in A$ gibt mit $f(X(\sigma,\tau)) = y(\sigma) \cdot y(\sigma\tau)^{-1} \cdot \sigma(y(\tau))$. Man prüft nun nach, dass $X$ die Relationen eines 2-Kozyklus erfüllt, und dass die Kohomologieklasse von $X$ sowohl unabhängig von den Wahlen der $y(\sigma)$ als auch unabhängig von einem Repräsentanten der Kohomologieklasse von $x$ ist. Wir schreiben $\delta([x]) := [X]$. ∎

**Satz 8.3.** *Für die abelsche und nichtabelsche Gruppenkohomologie gilt*

$$H^i(G,A) = \operatorname*{colim}_{\substack{G/N \\ \text{endl., disk.}}} H^i(G/N, A^N)\,.$$

*Beweis.* [NSW13, Lemma 1.2.5] ∎

## 9. Gruppenkohomologie von Automorphismengruppen

Die Gruppenkohomologie der Automorphismengruppen in einer $G$-Kategorie verrät etwas darüber, wie weit Isomorphie in der $G$-Kategorie von *äquivarianter* Isomorphie entfernt ist.

**Satz 9.1.** *1. Es sei $\mathcal{A}$ eine $G$-Kategorie und $T \in \mathcal{A}$. Dann hat man eine natürliche injektive Abbildung punktierter Mengen*

$$\Phi \colon \left\{ \text{Äquivariante Isomorphieklassen } [A] \;\middle|\; A \cong T \right\} \longrightarrow H^1(G, \operatorname{Aut}(T))\,.$$

*Hierbei sei die Klasse von $T$ der Basispunkt auf der linken Seite.*

2. *Ist $\mathcal{A}$ eine G-Kategorie von algebraischen Strukturen mit stetiger G-Wirkung*[5]*, oder die $K|k$-Kategorie der $K|k$-Galoismoduln oder der $K|k$-Galoisalgebren, so ist $\Phi$ ein Isomorphismus.*

*Beweis.* 1. Es sei $f\colon A \longrightarrow T$ ein Isomorphismus. Dann wird durch

$$x(\sigma) = f \circ \sigma(f)^{-1}$$

ein verschränkter Homomorphismus $x\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}(T)$ definiert, wie man leicht nachrechnet.

Sei nun $g\colon B \longrightarrow T$ ebenfalls ein Isomorphismus und es sei $y$ analog durch $y(\sigma) = g \circ \sigma(g)^{-1}$ definiert. Dann ist für $h \in \mathrm{Aut}(T)$ die Beziehung ${}^h x = y$ äquivalent dazu, dass $g^{-1} \circ h \circ f\colon A \longrightarrow B$ äquivariant ist. Hieraus folgt, dass $\Phi(A) := x$ wohldefiniert und injektiv ist.

2. Sei $[x] \in H^1(G, \mathrm{Aut}(T))$ vorgegeben. Wir können auf $T$ eine *getwistete Wirkung* durch ${}^x\sigma = x(\sigma) \circ \sigma \in \mathrm{Aut}(T)$ definieren. Man rechnet leicht nach, dass es sich tatsächlich um eine Wirkung handelt: ${}^x(\sigma\tau) = {}^x\sigma \circ {}^x\tau$. Ist die ursprüngliche Wirkung auf den Galoismodul oder die Galoisalgebra $T$ semilinear, so auch die getwistete Wirkung. Wir bezeichnen mit ${}^xT$ das Objekt mit der um $x$ getwisteten Wirkung. Dann gilt ${}^xT \cong T$ und dies wird durch die Identität $\mathrm{id}\colon {}^xT \longrightarrow T$ bezeugt. Tatsächlich gilt $\Phi({}^xT) = x$, denn man rechnet nach:

$$\begin{aligned}\Phi({}^xT)(\sigma) &= \mathrm{id} \circ \sigma(\mathrm{id})^{-1} = \sigma(\mathrm{id})^{-1} \\ &= (\sigma \circ \mathrm{id} \circ ({}^x\sigma)^{-1})^{-1} = {}^x\sigma \circ \sigma^{-1} = x(\sigma)\,.\end{aligned}$$ ■

**Korollar 9.2** (Hilbert 90)**.** *Für einen $K|k$-Galoismodul $V$ gilt*

$$H^1(K|k, \mathrm{GL}(V)) = 0\,.$$

*Beweis.* Nach Satz 9.1 genügt es zu zeigen, dass jeder $K|k$-Galoismodul, welcher als $K$-Vektorraum isomorph zu $V$ ist, bereits äquivariant isomorph zu $V$ ist. Da $K|k$-Galoismoduln frei sind, genügt hierzu ein Vergleich der $K$-Dimensionen. ■

**Korollar 9.3.** *Für einen $K|k$-Galoismodul $V$ gilt*

$$H^1(K|k, \mathrm{PGL}(V)) \cong \left\{ \begin{matrix}\text{Äquivariante Isomorphieklassen} \\ \text{von } K|k\text{-Galoisalgebren}\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} A \cong \mathrm{End}(V) \\ \text{als } K\text{-Algebra}\end{matrix} \right\}.$$ ■

**Bemerkung 9.4.** Mehr Details zu getwisteten Wirkungen und auch eine geometrische Interpretation findet man bei [Ser13, Abschnitt 5.3]

[5] Vgl. Beispiel 7.3

# 10. Galoiskohomologie und Brauergruppen

Wir hatten die relative Brauergruppe $\mathrm{Br}(K|k)$ definiert als einen Quotienten des Monoids der äquivarianten Isomorphieklassen zerfallender $K|k$-Galoisalgebren. Nach Korollar 9.3 steht die unterliegende Menge dieses Monoids in bijektiver Korrespondenz zu

$$\coprod_{[V]} H^1(K|k, \mathrm{PGL}(V)),$$

wobei die disjunkte Vereinigung über alle Isomorphieklassen von $K|k$-Galoismoduln genommen wird. Folglich sollte auch hierauf die Struktur eines Monoids gegeben sein. Wir werden im Folgenden kurz skizzieren, wie diese Struktur auf Kohomologieniveau beschrieben werden kann.

**Lemma 10.1.** *1. Es seien zwei $K|k$-Galoismoduln $V, W$, sowie Kohomologieklassen $[x] \in H^1(K|k, \mathrm{PGL}(V))$, $y \in H^1(K|k, \mathrm{PGL}(W))$ gegeben. Es bezeichne $(x \bullet y)(\sigma)$ das Element in $\mathrm{PGL}(V \otimes W)$, welches das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W) \arrow[r] \arrow[d, "x(\sigma)\otimes y(\sigma)"'] & \mathrm{End}(V \otimes W) \arrow[d, "(x\bullet y)(\sigma)"] \\
\mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W) \arrow[r] & \mathrm{End}(V \otimes W)
\end{tikzcd}$$

*kommutativ macht. Auf diese Weise wird ein verschränkter Homomorphismus*

$$x \bullet y \colon G(K|k) \longrightarrow \mathrm{PGL}(V \otimes W)$$

*definiert, dieser ist bis auf Kohomologie unabhängig von den Repräsentanten der Kohomologieklassen $[x], [y]$. Hierdurch wird eine Monoidstruktur auf*

$$\coprod_{[V]} H^1(K|k, \mathrm{PGL}(V))$$

*erklärt.*

*2. Die Bijektion*

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Äquivariante Isomorphieklassen} \\ \text{zerfallender } K|k\text{-Galoisalgebren} \end{matrix} \right\} \cong \coprod_{[V]} H^1(K|k, \mathrm{PGL}(V))$$

*ist ein Isomorphismus von Monoiden.*

*Beweis.* 1. Wegen des äquivarianten Isomorphismus von $K|k$-Galoisalgebren

$$\varphi \colon \mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W) \longrightarrow \mathrm{End}(V \otimes W)$$

kann man äquivalent zeigen, dass $x \otimes y \colon G(K|k) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W))$ ein verschränkter Homomorphismus ist. Dies folgt einfach aus der Austauschregel. Die Wohldefiniertheit dieses Produktes und die Assoziativität macht man sich ähnlich klar.

2. Es seien $f \colon A \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ und $g \colon B \longrightarrow \mathrm{End}(W)$ Isomorphismen und jeweils $x$ bzw. $y$ die zugeordneten verschränkten Homomorphismen[6]. Zu zeigen ist, dass $x \bullet y$ zu dem Isomorphismus $A \otimes B \cong \mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W) \cong \mathrm{End}(V \otimes W)$ korrespondiert. Dies folgt aus der Kommutativität des Diagrammes

$$\begin{tikzcd} A \otimes B \arrow[r, "f\otimes g"] \arrow[d, "="] & \mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "x(\sigma)\otimes y(\sigma)"] & \mathrm{End}(V \otimes W) \arrow[d, "(x\bullet y)(\sigma)"] \\ A \otimes B & \mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W) \arrow[l, "\sigma(f\otimes g)^{-1}"'] & \mathrm{End}(V \otimes W)\,. \arrow[l, "\sigma(\varphi)^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

■

Ganz ähnlich zeigt man:

**Lemma 10.2.** *1. Es sei $V$ ein $K|k$-Galoismodul und ein $[x] \in H^1(K|k, \mathrm{PGL}(V))$. Es sei $x^*(\sigma)$ dasjenige Element von $\mathrm{PGL}(V^*)$, welches das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{End}(V)^{\mathrm{op}} \arrow[r] \arrow[d, "x(\sigma)"] & \mathrm{End}(V^*) \arrow[d, "x^*(\sigma)"] \\ \mathrm{End}(V)^{\mathrm{op}} \arrow[r] & \mathrm{End}(V^*) \end{tikzcd}$$

*kommutativ macht. Hierdurch wird ein verschränkter Homomorphismus $x^* \colon G(K|k) \longrightarrow \mathrm{PGL}(V^*)$ definiert und dieser ist ist bis auf Kohomologie unabhängig von dem Repräsentanten der Kohomologieklasse $[x]$.*

*2. Unter dem Isomorphismus*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Äquivariante Isomorphieklassen} \\ \text{zerfallender } K|k\text{-Galoisalgebren} \end{array} \right\} \cong \coprod_{[V]} H^1(K|k, \mathrm{PGL}(V))$$

*korrespondiert der Übergang von $x$ zu $x^*$ zum Übergang von $A$ zu $A^{\mathrm{op}}$.* ■

**Satz 10.3.** *Die Verbindungsabbildungen*

$$\delta \colon H^1(K|k, \mathrm{PGL}(V)) \longrightarrow H^2(K|k, K^\times)\,,$$

[6] Vgl. Satz 9.1.

*welche durch die kurze exakte Sequenz Gleichung (7) induziert werden, setzen sich zu einem Homomorphismus von Monoiden*

$$\delta\colon \coprod_{[V]} H^1(K|k, \mathrm{PGL}(V)) \longrightarrow H^2(K|k, K^\times)$$

*zusammen. Es gilt $\delta([x^*]) = -\delta([x])$. Dieser ist surjektiv und es gilt $\delta([x]) = \delta([y])$ genau dann, wenn $[x \bullet y^*] = [1]$ gilt.*

*Skizze.* Wir zeigen $\delta(x^*) = -\delta(x)$, die Aussage $\delta([x \bullet y]) = \delta([x]) + \delta([y])$ zeigt man ähnlich. Sei $x\colon G(K|k) \longrightarrow \mathrm{PGL}(V)$ ein verschränkter Homomorphismus und seien $y(\sigma) \in \mathrm{GL}(V)$ derart, dass $x(\sigma)$ durch Konjugation mit $y(\sigma)$ gegeben ist. Man prüft leicht nach, dass dann $x^*(\sigma) \in \mathrm{PGL}(V^*)$ durch Konjugation mit $(y(\sigma)^{-1})^* \in \mathrm{GL}(V^*)$ gegeben ist. Seien außerdem $X(\sigma, \tau) \in K^*$ derart, dass $y(\sigma)y(\sigma\tau)^{-1}\sigma(y(\tau)) \in \mathrm{GL}(V)$ durch Multiplikation mit $X(\sigma, \tau)$ gegeben ist. Man rechnet nun nach, dass $(y(\sigma)^{-1})^*\, y(\sigma\tau)^*\, \sigma((y(\tau)^{-1})^*) \in \mathrm{GL}(V^*)$ durch Multiplikation mit $X(\sigma, \tau)^{-1}$ gegeben ist. Nach Definition der Abbildung $\delta$ ist $\delta([x^*]) = X(\sigma, \tau)^{-1} = \delta([x])^{-1}$.

Aus $\delta([x]) = \delta([y])$ folgt $\delta([x \bullet y^*]) = \delta([x]) - \delta([y]) = 0$. Wegen der Exaktheit von

$$0 = H^1(K|k, \mathrm{GL}(V \otimes W^*)) \longrightarrow H^1(K|k, \mathrm{GL}(V \otimes W^*)) \longrightarrow H^2(K|k, K^\times)$$

folgt $[x \bullet y^*] = [1]$.

Zum Beweis der Surjektivität dürfen wir wegen Satz 8.3 annehmen, dass $K|k$ endlich ist. Es genügt die Surjektivität von

$$H^1(K|k, \mathrm{PGL}(V)) \longrightarrow H^2(K|k, K^\times)\,,$$

wobei $V$ der freie $K|k$-Galoismodul auf der Basis $(e_\sigma)_{\sigma \in G(K|k)}$ sei. Sei dazu $[X] \in H^2(K|k, K^\times)$ vorgegeben. Wir müssen $A_\sigma \in \mathrm{GL}(V)$ finden mit

$$X(\sigma, \tau) \cdot \mathrm{Id} = A_\sigma \cdot \sigma(A_\tau) A_{\sigma\tau}^{-1}\,,$$

dann bilden die Bilder der $A_\sigma$ in $\mathrm{PGL}(V)$ einen verschränkten Homomorphismus und dieser ist das gesuchte Urbild. Definieren wir die $A_\sigma$ durch

$$A_\sigma(e_\tau) = X(\sigma, \tau) e_{\sigma\tau}\,,$$

so rechnet man leicht nach, dass sie das Gewünschte leisten. ∎

**Korollar 10.4.** *Es ist*

$$\mathrm{Br}(K|k) \cong H^2(K|k, K^\times)\,,$$

*insbesondere*

$$\mathrm{Br}(k) \cong \mathrm{Br}(k^{\mathrm{s}}|k) \cong H^2\left(k^{\mathrm{s}}|k, (k^{\mathrm{s}})^\times\right)\,.$$ ∎

# Anhang. Grundbegriffe der Monoidalen Kategorientheorie

## A. Monoidale Kategorien

Um unsere Resultate auf präzise und einheitliche Weise formulieren zu können, ist es zweckmäßig, etwas Terminologie aus der Kategorientheorie verwenden. Wir wiederholen daher im Folgenden einige Begriffe aus der monoidalen Kategorientheorie. Details zu den elementaren Definitionen und Eigenschaften findet man bei [Bra17] oder einigermaßen enzyklopädisch in der kurzen Notiz [Bae10].

**Definition A.1.** Eine *symmetrisch monoidale Kategorie* $(\mathcal{V}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ besteht aus den folgenden Daten:

- Einer gewöhnlichen Kategorie $\mathcal{V}$,
- einem Funktor $\otimes \colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, genannt das *Tensorprodukt*,
- einem fixierten Objekt $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V})$, der *monoidalen Eins*,
- Isomorphismen $\alpha_{V,W,X} \colon (V \otimes W) \otimes X \cong V \otimes (W \otimes X)$, welche natürlich in allen drei Variablen sind,
- Isomorphismen $\lambda_V \colon I \otimes V \cong V$, welche natürlich in der Variablen $V$ sind,
- Isomorphismen $\rho_V \colon V \otimes I \cong V$, welche natürlich in der Variablen $V$ sind,
- Isomorphismen $\sigma_{V,W} \colon V \otimes W \cong W \otimes V$, welche natürlich in den Variablen $V$ und $W$ sind.

$\alpha$, $\lambda$, $\rho$ und $\sigma$ heißen *Kohärenzisomorphismen*. Es wird außerdem gefordert, dass die Kohärenzisomorphismen in einem geeigneten Sinne kompatibel untereinander sind[7].

Wir folgen dem üblichen Notationsmissbrauch und bezeichnen die symmetrisch monoidale Kategorie $(\mathcal{V}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ einfach nur mit $\mathcal{V}$.

**Definition A.2.** Es seien $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ zwei symmetrisch monoidale Kategorien. Ein *lax symmetrisch monoidaler Funktor* $(F, \varphi) \colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ besteht aus den folgenden Daten:

- Einem gewöhnlichen Funktor $F \colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ der unterliegenden Kategorien,

[7] Zum Beispiel gibt es zwei denkbare Weisen, mithilfe verschiedener Assoziatoren $\alpha$ von $((V \otimes W) \otimes X) \otimes Y$ nach $V \otimes (W \otimes (X \otimes Y))$ zu gelangen, und man fordert, dass beide übereistimmen.

- einem fixierten Morphismus $\varphi\colon I \longrightarrow FI$ in $\mathcal{W}$,
- Morphismen $\varphi_{V,W}\colon FV \otimes FW \longrightarrow F(V \otimes W)$, welcher natürlich in den Variablen $V$ und $W$ sind.

Die Morphismen $\varphi$ heißen *Vergleichsmorphismen*. Es wird außerdem gefordert, dass die Vergleichsmorphismen mit den jeweiligen Kohärenzisomorphismen der beiden symmetrisch monoidalen Kategorien verträglich sind[8].

Wir sprechen einfach von einem *symmetrisch monoidalen Funktor*, wenn die Vergleichsmorphismen sogar Isomorphismen sind.

Wir bezeichnen den symmetrisch monoidalen Funktor $(F, \varphi)$ einfach nur mit $F$. Falls mehrere symmetrisch monoidale Funktoren gleichzeitig auftreten, bezeichnen wir die Vergleichsmorphismen von ihnen allen mit $\varphi$. Es werden keine Mehrdeutigkeiten auftreten.

**Definition A.3.** Eine *symmetrisch monoidale Transformation* $\tau\colon F \longrightarrow G$ zwischen lax symmetrisch monoidalen Funktoren ist eine gewöhnliche natürliche Transformation zwischen Funktoren, welche mit den jeweiligen Vergleichsmorphismen kompatibel ist. Man fordert also, dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} FV \otimes FW \arrow[r, "\tau\otimes\tau"] \arrow[d, "\varphi"'] & GV \otimes GW \arrow[d, "\varphi"] \\ F(V \otimes W) \arrow[r, "\tau"'] & G(V \otimes W) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & I_{\mathcal{W}} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ FI_{\mathcal{V}} \arrow[rr, "\tau"'] & & GI_{\mathcal{V}} \end{tikzcd}$$

stets kommutativ seien.

**Bemerkung A.4.** Es gilt:

- Sind $F\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$, $G\colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{X}$ lax symmetrisch monoidale Funktoren, so trägt die Komposition $G \circ F$ die Struktur eines symmetrisch monoidalen Funktors. Die Vergleichsabbildung für das Tensorprodukt ist beispielsweise durch

  $$GFV \otimes GFW \xrightarrow{\varphi} G(FV \otimes GW) \xrightarrow{G\varphi} GF(V \otimes W)$$

  gegeben.
- Sind $F, G, H\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ lax symmetrisch monoidale Funktoren und $\tau\colon F \longrightarrow G$ eine symmetrisch monoidale Transformationen, so auch $\tau' \circ \tau\colon F \longrightarrow H$.

[8] Zum Beispiel gibt es zwei denkbare Weisen, mithilfe der jeweiligen Assoziatoren und den Vergleichsmorphismen von $(F(V) \otimes F(W)) \otimes F(X)$ nach $F(V \otimes (W \otimes X))$ zu gelangen, und man fordert, dass beide übereinstimmen.

- Sind $F, G\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$, $H\colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{X}$ lax symmetrisch monoidale Funktoren und ist $\tau\colon F \longrightarrow G$ eine symmetrisch monoidale Adjunktion, so auch $H\tau\colon H \circ F \longrightarrow H \circ G$.
- Sind $F\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$, $G, H\colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{X}$ lax symmetrisch monoidale Funktoren und $\tau\colon G \longrightarrow H$ eine symmetrisch monoidale Transformation, so auch $\tau_F\colon G \circ F \longrightarrow H \circ F$.

Es gilt Assoziativität für die Komposition von Funktoren und von Transformationen, sowie die Austauschregel für vertikale Komposition. Folglich liegt die Struktur einer 2-Kategorie $\mathsf{SymMonCat}$ vor.

Wie in jeder 2-Kategorie hat man den Begriff einer Adjunktion:

**Definition A.5.** Eine *symmetrisch monoidale Adjunktion* $(F, G, \eta, \varepsilon)$ zwischen symmetrisch monoidalen Kategorien $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ besteht aus:

- Einem lax symmetrisch monoidalen Funktor $F\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$, dem *Linksadjungierten*,
- einem lax symmetrisch monoidalen Funktor $G\colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V}$, dem *Rechtsadjungierten*,
- einer monoidalen Transformation $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{V}} \longrightarrow G \circ F$, der *Einheit*,
- einer monoidalen Transformation $\varepsilon\colon F \circ G \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{W}}$, der *Koeinheit*.

Man fordert außerdem, dass die Kompositionen

$$FV \xrightarrow{F\eta_V} FGFV \xrightarrow{\varepsilon_{FV}} FV\,, \qquad GW \xrightarrow{\eta_{GW}} GFGW \xrightarrow{G\varepsilon_W} GW$$

jeweils die Identität ergeben.

Die Adjunktion heißt eine *symmetrisch monoidale Äquivalenz*, falls Einheit und Koeinheit Isomorphismen sind. In diesem Fall ist auch $(G, F, \varepsilon^{-1}, \eta^{-1})$ eine Äquivalenz von $\mathcal{W}$ nach $\mathcal{V}$.

**Bemerkung A.6.** Wie in jeder 2-Kategorie ist der Linksadjungierte $F$ eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie durch den Rechtsadjungierten $G$ bestimmt. Außerdem lassen sich Adjunktionen komponieren:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{W} \arrow[l, bend left, "G"] \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{X} \arrow[l, bend left, "K"] \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, bend left, "H\circ F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{W} \arrow[l, bend left, "K\circ G"] \end{tikzcd}$$

**Lemma A.7.** *Der linksadjungierte lax symmetrisch monoidale Funktor einer symmetrisch monoidalen Adjunktion ist automatisch ein symmetrisch monoidaler Funktor.*

*Skizze.* Der inverse Morphismus zum Vergleichsmorphismus $\varphi\colon FV \otimes FW \longrightarrow F(V \otimes W)$ ist durch die Komposition

$$F(V \otimes W) \xrightarrow{F(\eta\otimes\eta)} F(GVF \otimes GFW) \xrightarrow{F\varphi} FG(FV \otimes FW) \xrightarrow{\varepsilon} FV \otimes FW$$

gegeben, wie man durch das Verkleben geeigneter kommutativer Diagramme verifiziert. Ähnlich findet man den Inversen zu $\varphi\colon I \longrightarrow FI$. ∎

# B. Monoide

**Definition B.1.** Ein *Monoid* in einer symmetrisch monoidalen Kategorie $\mathcal{V}$ besteht aus einem Objekt $M$ zusammen mit einer *Multiplikation* $\mu\colon M \otimes M \longrightarrow M$ und einem *Einselement* $\eta\colon I \longrightarrow M$, welche sich assoziativ bzw. neutral verhalten.

Ein *Homomorphismus* $f\colon M \longrightarrow N$ von Monoiden ist ein Morphismus in der Kategorie $\mathcal{V}$, welcher jeweils mit $\mu$ und $\eta$ verträglich ist. Man erhält eine Kategorie $\mathsf{Mon}(\mathcal{V})$ der Monoide in $\mathcal{V}$.

**Bemerkung B.2.** Ist $\mathcal{V}$ symmetrisch monoidal und sind $M$, $N$ zwei Monoide, so trägt das Tensorprodukt $M \otimes N$ wieder die Struktur eines Monoids mit der Multiplikation

$$(M \otimes N) \otimes (M \otimes N) \xrightarrow{\cong} (M \otimes M) \otimes (N \otimes N) \xrightarrow{\mu\otimes\mu} M \otimes N\,.$$

Auf diese Weise erhält $\mathsf{Mon}(\mathcal{V})$ selbst wieder die Struktur einer symmetrisch monoidalen Kategorie.

**Bemerkung B.3.** Ist $M$ ein Monoid in $\mathcal{V}$ und $F\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ ein lax symmetrisch monoidaler Funktor, so trägt $F(M)$ wiederum die Struktur eines Monoids mit der Multiplikation

$$F(M) \otimes F(M) \xrightarrow{\varphi} F(M \otimes M) \xrightarrow{F(\mu)} F(M)\,.$$

Dies definiert einen induzierten symmetrisch monoidalen Funktor zwischen den Monoidkategorien $F\colon \mathsf{Mon}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathsf{Mon}(\mathcal{W})$.

Eine symmetrisch monoidale Transformation $\tau\colon F \longrightarrow G$ liefert auch eine natürliche Transformation zwischen den induzierten Funktoren.

Auf diese Weise liefern Adjunktionen zwischen symmetrisch monoidalen Kategorien auch Adjunktionen zwischen den Monoidkategorien und Äquivalenzen führen zu Äquivalenzen.

**Beispiel B.4.** Monoide in der symmetrisch monoidalen Kategorie $\mathsf{Mod}(k)$ sind genau die $k$-Algebren, deren Kategorie wir mit $\mathsf{Alg}(k)$ bezeichnen. Ist $\ell|k$ eine Körpererweiterung, so gibt es bekanntlich die symmetrisch monoidale Adjunktion zwischen $\mathsf{Mod}(k)$ und $\mathsf{Mod}(\ell)$ bestehend aus Einschränkung und Erweiterung der Skalare. Nach den obigen Bemerkungen wird auch eine symmetrisch monoidale Adjunktion zwischen $\mathsf{Alg}(k)$ und $\mathsf{Alg}(\ell)$ induziert.

# Literatur


[Bae10] John Baez. „Some Definitions Everyone Should Know“. 2010. URL: http://math.ucr.edu/home/baez/qg-winter2001/definitions.pdf (besucht am 20. 06. 2017).

[Bra17] Martin Brandenburg. *Einführung in die Kategorientheorie: Mit ausführlichen Erklärungen und zahlreichen Beispielen*. Springer-Verlag, 2017.

[Dra83] Peter Draxl. *Skew fields*. Bd. 81. Cambridge University Press, 1983.

[Hai79] Darrell Haile. „On central simple algebras of given exponent“. In: *Journal of Algebra* 57.2 (1979), S. 449–465.

[NSW13] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt und Kay Wingberg. *Cohomology of number fields*. Springer Science & Business Media, 2013.

[Ser13] Jean-Pierre Serre. *Galois cohomology*. Springer Science & Business Media, 2013.

[Tig87] Jean-Pierre Tignol. „On the corestriction of central simple algebras“. In: *Mathematische Zeitschrift* 194.2 (1987), S. 267–274.